

# Задания 18

# ЕГЭ по информатике

Вебинар «Теория и практика решения 18 задания»

---

# Типы задания 18

1. Задания на условие делимости
  2. Задания на отрезки
  3. Задания на множества
  4. Задания на поразрядную конъюнкцию
  5. Задания на неравенства
-



## Логические операции:

- $\neg$  *инверсия* (логическое отрицание),
- $\wedge$   $\cdot$  *конъюнкция* (логическое умножение),
- $\vee$   $+$  *дизъюнкция* (логическое сложение),

## Дополнительные операции:

- $\rightarrow$  *импликация* (логическое следование)

Свойство импликации:  $A \rightarrow B = \neg A \vee B$      $1 \rightarrow 0 = 0$   
 $\equiv$  *эквивалентность* (логическое равенство)

Формула дополнения до целого:  $A \vee \neg A = 1$

---



# 1. Задания на условие делимости

1. (№ 132) Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 36))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

*Источник - сайт Полякова К.Ю.*

---



1) Введем условные обозначения, которые будем использовать при решении.

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A)$$

$$24 = \text{ДЕЛ}(x, 24)$$

$$36 = \text{ДЕЛ}(x, 36)$$

---



2) Перепишем формулу из условия задачи в соответствии с принятыми обозначениями

Было:

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 36))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1)

Стало:  $\neg A \rightarrow (\neg 24 \wedge \neg 36) = 1$

---



3) Решим логическое уравнение

$$\neg A \rightarrow (\neg 24 \wedge \neg 36) = 1$$

$$A \vee (\neg 24 \wedge \neg 36) = 1$$

$$\neg A = \overline{24 \vee 36}$$

Тогда  $A = 24 \vee 36$

$$A \vee \neg A = 1$$

4) Анализ полученного результата

$$A = \text{НОД}(24, 36) = 12$$

---



**2. (№ 136)** Обозначим через ДЕЛ( $n, m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  $(\neg \text{ДЕЛ}(x, 19) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$  тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

*Источник - сайт Полякова К.Ю.*

---



1) Введем условные обозначения, которые будем использовать при решении.

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A)$$

$$19 = \text{ДЕЛ}(x, 19)$$

$$15 = \text{ДЕЛ}(x, 15)$$

---



2) Перепишем формулу из условия задачи в соответствии с принятыми обозначениями

Было:

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 19) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1

Стало:

$$(\neg 19 \vee \neg 15) \rightarrow \neg A = 1$$

---



3) Решим логическое уравнение

$$(\neg 19 \vee \neg 15) \rightarrow \neg A = 1$$

$$\overline{19} \vee \overline{15} \vee \overline{A} = 1$$

$$(19 \wedge 15) \vee \overline{A} = 1$$

$$A = 19 \wedge 15$$

$$A \vee \neg A = 1$$

4) Анализ полученного результата

$$A = \text{НОК}(19, 15) = 285$$

---



## 2. Задания на отрезки

(№ 113) На числовой прямой даны два отрезка:

$P = [25, 37]$  и  $Q = [32, 47]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in P)) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

*Источник - сайт Полякова К.Ю.*



# Решение задачи на отрезки

1) Введем условные обозначения, которые будем использовать при решении.

$$P = x \in P$$

$$Q = x \in Q$$

$$A = x \in A$$



2) Перепишем формулу из условия задачи в соответствии с принятыми обозначениями

Было:

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in P)) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q))$$

Стало:

$$(A \wedge \bar{P}) \rightarrow (\bar{P} \wedge Q) = 1$$



3) Решим логическое уравнение

$$(A \wedge \bar{P}) \rightarrow (\bar{P} \wedge Q) = 1$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

Получим

$$\overline{(A \wedge \bar{P})} \vee (\bar{P} \wedge Q) = \bar{A} \vee P \vee Q = 1$$

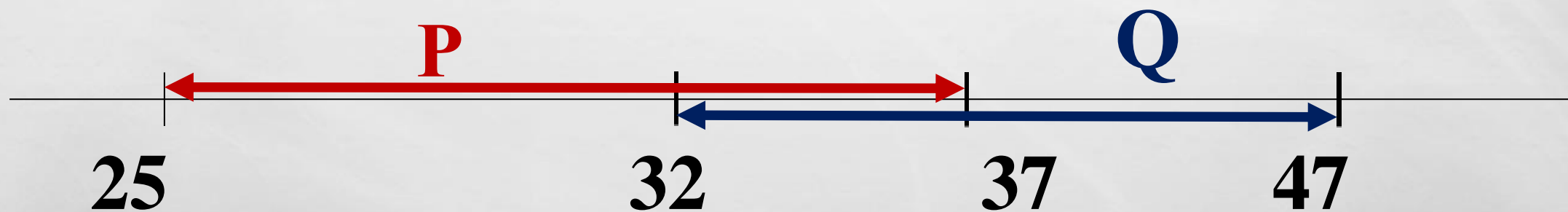


#### 4) Анализ полученного результата

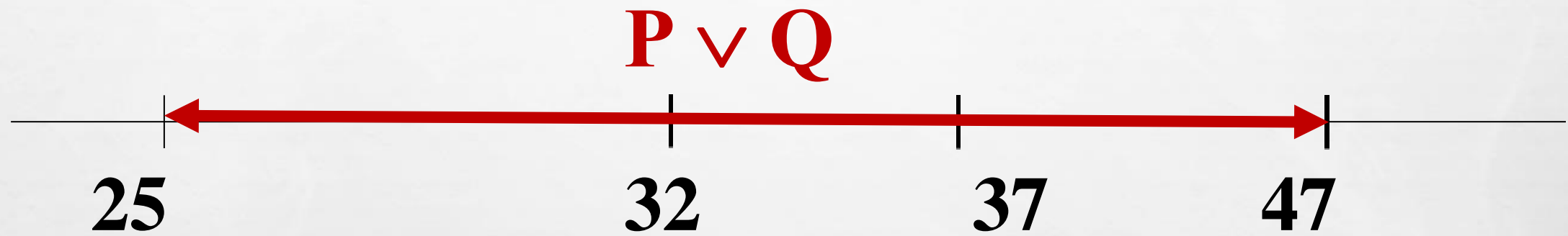
$$\bar{A} \vee P \vee Q = 1$$

Объединение отрезков **P** и **Q** можно визуализировать:

$P = [25, 37]$  и  $Q = [32, 47]$ .



$$\bar{A} \vee P \vee Q = 1$$



По условию нашей задачи, нам нужна **максимальная длина отрезка А**. Находим ее:  $47 - 25 = 22$ .

Ответ: 22.



### 3. Задания на множества

(№ 167) Элементами множеств  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  являются натуральные числа, причём

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

$$Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}.$$

Известно, что выражение

$$( (x \in P) \rightarrow (x \in A) ) \vee ( \neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in Q) )$$

истинно (т. е. принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ ). Определите наименьшее возможное количество элементов в множестве  $A$ .

1) Введем условные обозначения, которые будем использовать при решении.

$$A = x \in A$$

$$P = x \in P$$

$$Q = x \in Q$$



2) Перепишем формулу из условия задачи в соответствии с принятыми обозначениями

Было:

$$( (x \in P) \rightarrow (x \in A) ) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in Q) )$$

Стало:

$$(P \rightarrow A) \vee (\neg A \rightarrow \neg Q) = 1$$

3) Решим логическое уравнение

$$(P \rightarrow A) \vee (\neg A \rightarrow \neg Q) = 1$$

3.1. Представим логические следования (в скобках) в базовых логических операциях :  $(\neg P \vee A) \vee (A \vee \neg Q) = 1$

3.2. Опустим скобки, применим закон равносильности и перегруппируем, получим:  $A \vee \neg P \vee \neg Q = 1$

3.3. Применим закон де Моргана:  $A \vee \neg(P \wedge Q) = 1$



$$A \vee \neg(P \wedge Q) = 1$$

3.4. Сведем получившееся выражение к формуле:

$$A \vee \neg A = 1$$

и найдем, чему равно  $\neg A$  :  $\neg A = \neg(P \wedge Q)$

Очевидно, что  $A = P \wedge Q$

4) Анализ полученного результата

Искомое множество  $A$  представляет собой **пересечение**  
**множеств  $P$  и  $Q$ .**

Искомое множество  $A$  есть пересечение множеств

$P = \{2, 4, \mathbf{6}, 8, 10, \mathbf{12}, 14, 16, \mathbf{18}, 20\}$  и

$Q = \{3, \mathbf{6}, 9, \mathbf{12}, 15, \mathbf{18}, 21, 24, 27\}$ , таким образом

$A = \{\mathbf{6}, \mathbf{12}, \mathbf{18}\}$

и содержит только 3 элемента.

Ответ: 3



# 1. Задания на побитовую конъюнкцию

---

10 and 12 = ?

биты	3	2	1	0
10 =	1	0	1	0
12 =	1	1	0	0
<hr/>				
8 =	1	0	0	0

10 and 12 = 1010 and 1100 = 1000 = 8.

Вычислим значение выражения:  $(x \& 12 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0)$

---

при  $x = 10, A = 26$ :

Вычисляем результаты поразрядного **И** (это числа!):

$$10 \& 12 = 8 \quad 10 \& 26 = 10$$

Вычисляем логические значения (И – истина, Л – ложь):

$$(10 \& 12 \neq 0) = \text{И} \quad (10 \& 26 = 0) = \text{Л}$$

подставляем эти логические значения в заданное выражение:

$$\text{И} \rightarrow \text{Л} = \text{Л}$$



# ВИДЫ ЗАДАНИЙ

1. Определите **наименьшее** натуральное число  $a$ , такое что выражение  $((x \& A = 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0)))$  тождественно истинно (то есть значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?
2. Определите **наибольшее** натуральное число  $a$ , такое что выражение  $((x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0)))$  тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

*Вводим множества:*  $Z_K = \{x : x \ \& \ K = 0\}$

$$\bar{Z}_K = \{x : x \ \& \ K \neq 0\}$$

$$Z_a = \{x : x \ \& \ A = 0\}$$



## Утверждение 1.

Логическое выражение  $Z_K \rightarrow Z_M$  истинно для всех  $x$  тогда и только тогда, когда множество единичных битов двоичной записи числа  $M$  входит во множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ .

## Утверждение 2.

$$Z_b \cdot Z_c \Leftrightarrow Z_{b \text{ or } c}$$

$$Z_b + Z_c \Leftrightarrow Z_{b \text{ and } c}$$

### Утверждение 3.

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_c) = (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}) + (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c)$$

### Утверждение 4.

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_c) = (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c)$$

(М.В. Кузнецова).

Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(((x \& 13 \neq 0) \vee (x \& A \neq 0)) \rightarrow (x \& 13 \neq 0) \vee ((x \& A \neq 0) \wedge (x \& 39 = 0)))$$

тождественно истинно.

*Источник - сайт Полякова К.Ю.*



1) Запишем формулу из условия задачи в соответствие с принятыми обозначениями  $((\bar{\mathbf{Z}}_{13} \vee \bar{\mathbf{Z}}_A) \rightarrow \bar{\mathbf{Z}}_{13}) \vee \bar{\mathbf{Z}}_A \cdot \mathbf{Z}_{39}$

## 2) Решим логическое уравнение

## 2.1 Представим логические следования в базовых логических операциях :

$$\mathbf{Z}_{13} \cdot \mathbf{Z}_A \vee \overline{\mathbf{Z}}_{13} \vee \overline{\mathbf{Z}}_A \cdot \mathbf{Z}_{39} \qquad \mathbf{A} \vee \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

2.2 Применим закон поглощения, получим :  $\mathbf{Z}_A \vee \overline{\mathbf{Z}}_{13} \vee \overline{\mathbf{Z}}_A \cdot \mathbf{Z}_{39}$

## 2.3 Перегруппируем $\mathbf{Z}_A \vee \overline{\mathbf{Z}}_A \cdot \mathbf{Z}_{39} \vee \overline{\mathbf{Z}}_{13}$

2.4 Применим закон поглощения  $\mathbf{Z}_A \vee \mathbf{Z}_{39} \vee \overline{\mathbf{Z}}_{13}$

## 2.5 Строим импликацию так чтобы избавиться от всех инверсий

$$\mathbf{Z}_{13} \rightarrow (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_{39}) \Leftrightarrow (\mathbf{Z}_{13} \rightarrow \mathbf{Z}_A) + (\mathbf{Z}_{13} \rightarrow \mathbf{Z}_{39})$$



$$= 0$$

# Определите наименьшее натуральное число $A$

$$Z_{13} \rightarrow A = 1$$

биты	3	2	1	0
13 =	1	1	0	1

Утверждение 1. Логическое выражение

$Z_K \rightarrow Z_M$  истинно для всех  $x$  тогда и только тогда, когда множество единичных битов двоичной записи числа  $M$  входит во множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ .

## №226 Побитовая конъюнкция

---

Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 39 = 7)) \vee (x \& 30 \neq 6)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?



Выражение  $(x \& 39 = 7)$ ?

Переведём числа в двоичную систему:

**5 4 3 2 1 0**

$$39 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1_2$$

$$7 = \quad\quad\quad 1\ 1\ 1_2.$$

Истинность  $(x \& 39 = 7)$  означает, что биты числа  $x$  с номерами 3, 4, 5 равны 0;

биты числа  $x$  с номерами 0, 1, 2 равны 1.

$$(x \& 39 = 7)$$

$$Z_{32} \cdot \bar{Z}_4 \cdot \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_1 = 1$$

$$(x \& b = c) \Leftrightarrow Z_{b-c} \cdot \bar{Z}_{c_1} \cdot \bar{Z}_{c_2} \dots \cdot \bar{Z}_{c_q} = 1$$

$$(x \& 30 \neq 6)?$$

$$\overline{Z_{24} \cdot \bar{Z}_4 \cdot \bar{Z}_2} = 1$$

$$\bar{Z}_{24} + Z_4 + Z_2 = 1$$

$$(x \& b \neq c) \Leftrightarrow \bar{Z}_{b-c} + Z_{c_1} + Z_{c_2} + \dots + Z_{c_q} = 1$$

где  $\neg c_1, \neg c_2, \dots, \neg c_q$  – степени числа 2, которые соответствуют единичным битам числа  $c$ .

Например, для  $c = 5 = 101_2$  имеем  $c_1 = 2^2 = 4, c_2 = 2^0 = 1$ .

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_c) = (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}) + (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c)$$

2.3 Перегруппируем  $\bar{\mathbf{Z}}_{24} \vee \mathbf{Z}_A \vee \mathbf{Z}_{32} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_1 \vee \mathbf{Z}_4 \vee \mathbf{Z}_2$

2.4 Строим импликацию так чтобы избавиться от всех инверсий

$$\mathbf{Z}_{24} \rightarrow (\mathbf{Z}_A \vee \mathbf{Z}_{32} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_1 \vee \mathbf{Z}_4 \vee \mathbf{Z}_2) \Leftrightarrow (\mathbf{Z}_{24} \rightarrow \mathbf{Z}_A) \vee (\mathbf{Z}_{24} \rightarrow \mathbf{Z}_{32} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_1) \vee (\mathbf{Z}_{24} \rightarrow \mathbf{Z}_4) \vee (\mathbf{Z}_{24} \rightarrow \mathbf{Z}_2)$$



---

$$(\mathbf{Z}_{24} \rightarrow \mathbf{Z}_A)$$

$$24 = 11000_2$$

$$A_{\max} = 24$$

$$A_{\min} = 8$$

Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула  
 $((x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 7))$   
тождественно истинна (то есть принимает значение  
1 при любых целых неотрицательных значениях  
переменных  $x$  и  $y$ )?

*Источник - сайт Полякова К.Ю.*

---

$$(x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A)$$

$$(y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 7)$$